155 Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Soit $\mathbb{K}$ un corps, $n\in\mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u\in\mathcal{L}(E)$. Soit χ_u polynôme caractéristique de u et π_u son polynôme minimal.

I] Diagonalisabilité

1] Critères de diagonalisabilité

Définition 1: On dit que u est diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale. On dit qu'une matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale. [Rom] XXI.5

Lemme 2: Soit $p\in\mathbb{N}^*$, $(P_i)_{i=1}^{p}\in\mathbb{K}[X]\setminus\{0\}^p$ tels que les P_i sont deux à deux premiers entre eux et $(Q_k=\prod_{j=1, j\neq k}^{p} P_j)$. Alors: les Q_k sont premiers entre eux dans leur ensemble et pour tout $k\in[\![1;p]\!]$, P_k et Q_k sont premiers entre eux. XIX.4

Théorème 3: (de décomposition des noyaux) Soit $(P_i)_{i=1}^{p}$ famille de $p\in\mathbb{N}^*$ polynômes deux à deux premiers entre eux de $\mathbb{K}[X]\setminus\{0\}$ et $P=\prod_{k=1}^{p} P_k$. Alors: $\ker(P(u))=\bigoplus_{k=1}^{p}\ker(P_k(u))$ et les projecteurs $(\pi_k: \ker(P(u))\to\ker(P_k(u)))_{k=1}^{p}$ sont des éléments de $\mathbb{K}[u]$.

Proposition 4: Les assertions suivantes sont équivalentes:
(1) u est diagonalisable
(2) il existe $P\in\mathbb{K}[X]\setminus\{0\}$ scindé à racines simples tel que $P(u)=0$
(3) π_u est scindé à racines simples
[Rom]

Exemples 5: (1) Un projecteur est diagonalisable car annulé par X^2-X.
(2) Une symétrie vectorielle est diagonalisable car annulée par X^2-1.
(3) Le seul endomorphisme nilpotent diagonalisable est 0

Théorème 6: Les assertions suivantes sont équivalentes: ~~(5) Il existe P~~
(1) u est diagonalisable
(2) $E=\bigoplus_{k=1}^{p}\ker(u-\lambda_k id)$
(3) $\sum_{k=1}^{p}\dim(\ker(u-\lambda_k id))=n$
(4) $\chi_u(X)=\prod_{k=1}^{p}(X-\lambda_k)^{\dim(\ker(u-\lambda_k id))}$
XXI.5 [Rom]

2] Diagonalisation simultanée

Soit I ensemble ayant au moins 2 éléments et $(u_i)\in\mathcal{L}(E)^I$.

Définition 7: On dit qu'une base $\mathcal{B}$ de E est une base commune de diagonalisation pour (u_i) si c'est une base de vecteurs propres pour chaque u_i.

Théorème 8: Soit $(u_i)\in\mathcal{L}(E)^I$ endomorphismes diagonalisables. Alors: il existe une base commune de diagonalisation pour (u_i) ssi pour tout $i,j\in I^2$, $u_i\circ u_j=u_j\circ u_i$. XXI.6 [Rom]

Corollaire 9: Soit $(A_i)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^I$ diagonalisables. Alors: (A_i) sont simultanément diagonalisables ssi A_i commutent.

Application 10: Soit $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisables et $\Phi_{A,B}: M\mapsto AM+MB$ endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors: $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable. XXI.10 [Rom]

3] Diagonalisabilité et semi-simplicité

Définition 11: On dit que u est semi-simple si tout sous-espace vectoriel de E stable par u admet un supplémentaire stable par u. XIX.7

Théorème 12: Pour $\mathbb{K}$ algébriquement clos, u est semi-simple ssi u est diagonalisable.

Remarque 13: Si u diagonalisable, alors on a immédiatement que u est semi-simple.

Théorème 14: u est semi-simple ssi π_u est sans facteurs carrés dans sa décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$.

Application 15: (théorème de Dunford) Pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, il existe un unique couple $(d,n)\in\mathcal{L}(E)$ tel que d est semi-simple, n est nilpotent, $d\circ n=n\circ d$ et $u=d+n$. [Rom]

II] Utilisation de la diagonalisabilité

1] Décomposition de Dunford

XIX.5 [Rom]

Proposition 15 : Soit $P(X)=\prod_{k=1}^{p}(X-\lambda_k)^{m_k}\in\mathbb{K}[X]$ polynôme annulateur de u et $(N_k=\ker(u-\lambda_k id)^{m_k})_{k=1}^{p}$.

Alors : $E=\bigoplus_{k=1}^{p} N_k$ et pour tout $k\in[\![1;p]\!]$, le projecteur sur N_k parallèlement à $\bigoplus_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{p} N_j$ est un polynôme en u.

Théorème 16 : (décomposition de Dunford) Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$.

Alors : il existe un unique couple $(d;n)\in\mathcal{L}(E)$ tel que d est diagonalisable, n nilpotent, $dn=nd$ et $u=d+n$.
De plus, $d,n\in\mathbb{K}[u]$.

Remarque 17 : Si l'on ne suppose pas χ_u scindé, alors : "d diagonalisable" devient "d semi-simple".

Corollaire 18 : Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$.

Alors : il existe un UNIQUE couple $(D;N)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que D est diagonalisable et N nilpotente, $DN=ND$ et $A=D+N$.
De plus, D et N sont des polynômes en A.

Exemple 19 : Soit $A=\begin{pmatrix} a & c\\ 0 & b\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Si $a=b$, alors : $A=\underline{\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}}+\underline{\begin{pmatrix} 0 & c\\ 0 & 0\end{pmatrix}}$ et $DN=\begin{pmatrix} 0 & ac\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & bc\\ 0 & 0\end{pmatrix}=ND$.
On a bien la décomposition de Dunford de A.
Si $a\neq b$, alors ce qui précède n'est pas la décomposition de Dunford. C'est plutôt $D=A$ et $N=O_2$.

2] Calcul de puissances, d'inverses et d'exponentielles de matrices.

[NR]

Proposition 20 : Si $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable $A=P\mathrm{diag}(\lambda_1;\dots;\lambda_n)P^{-1}$

Alors : pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $A^k=P\,\mathrm{diag}(\lambda_1^k;\dots;\lambda_n^k)P^{-1}$

Exemple 21 : Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} -1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}P^{-1}$ diagonalisable.

Alors : pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $A^k=P\begin{pmatrix} (-1)^k & 0\\ 0 & 3^k\end{pmatrix}P^{-1}$

[NR]

Proposition 22 : Si $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable $A=P\mathrm{diag}(\lambda_1;\dots;\lambda_n)P^{-1}$

Alors : $A^{-1}=P^{-1}\mathrm{diag}(\lambda_1^{-1};\dots;\lambda_n^{-1})P$

Exemple 23 : En reprenant $A=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ diagonalisable,
$A^{-1}=P^{-1}\begin{pmatrix} -1 & 0\\ 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}P$

Proposition 24 : Si $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable $A=P\mathrm{diag}(\lambda_1;\dots;\lambda_n)P^{-1}$

Alors : $\exp(A)=P\,\mathrm{diag}(\exp(\lambda_1);\dots;\exp(\lambda_n))P^{-1}$

Exemple 25 : De même pour $A=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ diagonalisable,
$\exp(A)=P\begin{pmatrix} e^{-1} & 0\\ 0 & e^{3}\end{pmatrix}P^{-1}$.

Proposition 26 : Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $A=D+N$ sa décomposition de Dunford.

Alors : $\exp(A)=\exp(D)\exp(N)$

3] Application aux polygônes

[Isen]

Définition 27 : Soit $(z_1;\dots;z_n)\in\mathbb{C}^n$. L'isobarycentre de $(z_1;\dots;z_n)$ est : $g=\dfrac{z_1+\dots+z_n}{n}$.

Proposition 28 : Soit $(a_0;\dots;a_{n-1})\in\mathbb{C}^n$ et $\omega=e^{i\frac{2\pi}{n}}$

Alors :
$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1}\\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2}\\ \vdots & & & \vdots\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0\end{vmatrix}=\prod_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}a_k\,\omega^{jk}$$

Théorème 29 : Soit P polygône du plan complexe dont les sommets sont $\{z_1;\dots;z_n\}$ et soit la suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $P_0=P$ et telle que les sommets de P_{k+1} sont les milieux des arêtes de P_k.

Alors : la suite (P_k) converge vers l'isobarycentre de P lorsque $k\to+\infty$.

4] À la réduction de matrices

[Los]

Théorème : (forme normale de Smith) Soit $\mathbb{A}$ anneau euclidien, $m,n\in\mathbb{N}^*$ et $M\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{A})$

Alors : $\exists\, P,Q\in GL_m(\mathbb{A})\times GL_n(\mathbb{A})\setminus PMQ=\begin{pmatrix} f_1 & & \\ & \ddots f_r & \\ & & 0\end{pmatrix}$ avec $f_1|\dots|f_r\in\mathbb{A}$ uniques modulo les inversibles de $\mathbb{A}$.

III) Diagonalisation dans un espace euclidien

Soit à présent E un espace euclidien i.e. un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot ; \cdot \rangle$.

1) Orthodiagonalisation des endomorphismes symétriques

[Rom] XXII.6

Définition 30 : Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit symétrique (ou auto-adjoint) si $u^* = u$ c'est-à-dire pour tout $x, y \in E$, $\langle u(x) | y \rangle = \langle x | u(y) \rangle$.
On note $S(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E.

Exemple 31 : Les dilatations sont des endomorphismes symétriques.

Proposition 32 : $u \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique ssi la matrice de u dans une base orthonormée de E est symétrique.

[Rom] XXII.7

Théorème 33 : (spectral) Tout endomorphisme $u \in S(E)$ se diagonalise dans une base orthonormée.

Corollaire 34 : Toute matrice $A \in S_n(\mathbb{R})$ se diagonalise en une base orthonormée i.e. il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $PA{}^tP$ est diagonale.

[Rom] XXII.9.2

Application 35 : Soit $(u_i) \in S(E)^I$.
Alors : il existe une base orthonormée commune de diagonalisation dans E pour (u_i) ssi pour tout $i, j \in I$, $u_i \circ u_j = u_j \circ u_i$.

2) Presque orthodiagonalisation des endomorphismes normaux

[Rom] XXII.10

Définition 36 : On dit que u est normal si $u^* \circ u = u \circ u^*$.

Exemples 37 : (1) Les endomorphismes symétriques $S(E)$ (tels que $u^* = u$) sont normaux.
(2) Les endomorphismes anti-symétriques $A(E)$ (tels que $u^* = -u$) sont normaux.
(3) Les endomorphismes orthogonaux $O(E)$ (tels que $u^* \circ u = u \circ u^* = id$) sont normaux.

[Rom] XXII.10

Lemme 38 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal et F sous-espace vectoriel de E stable par u.
Alors : $F^\perp$ est stable par u.

Lemme 39 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Alors : il existe un sous-espace vectoriel P de E de dimension 1 ou 2 stable par u.

Lemme 40 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal.
Alors : il existe des sous-espaces vectoriels de E : $P_1; \dots; P_r$ deux à deux orthogonaux, de dimension 1 ou 2, stables par u tels que $E = \bigoplus_{j=1}^{r} P_j$.

Théorème 41 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal.
Alors : il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} D_p & & (0) \\ & R_1 & \\ (0) & & \ddots \; R_r \end{pmatrix}$ avec D_p matrice diagonale, $R_k = \begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix}$ et $a_k \neq 0$ tels que $p + 2r = n$.

Références:

[Rom] Mathématiques pour l'agrégation Algèbre et Géométrie - Rombaldi
[NR] No Reference ¨
[Isen] L'oral à l'agrégation de mathématiques - Isenmann
[Les] 131 développements pour l'oral - Lesesvre